Exercices Supplementaires (théorie des groupes)

1) Mq le seul sous groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$ qui contient une transposition est $\mathfrak{S}_n$.

2) Mq un groupe abélien est simple ssi il est d'ordre premier

3) Soit $\varphi : G \to G'$ un morphisme de groupes.

- Mq si $H' \triangleleft G'$ alors $\varphi^{-1}(H') \triangleleft G$.
- Mq si φ surjective alors l'image d'un sgrp distingué de G est distinguée dans G'
- Et si φ non surjective ?

4) Mq il n'existe (à isomorphisme près) que 2 grp d'ordre 6 et les identifier.

Caractères des groupes abéliens finis.

5) Soit G un grp abélien fini (on note sa loi multiplicativement)

Soit $\hat{G} = \{\varphi : G \to \mathbb{C}^* : \varphi \text{ morphisme}\}$

a) Soit $\varphi \in \hat{G}$ Calculer $\sum_{x \in G} \varphi(x)$

b) Soit $x \in G \setminus \{1\}$ mq $\exists \psi \in \hat{G} : \psi(x) \neq 1$

i) Construire $\psi : \langle x \rangle \to \mathbb{C}^*$ morphisme tq $\psi(x) \neq 1$

ii) Soit $G' \leq G$ le + grand sous groupe de G sur lequel on peut prolonger ψ.

Si $G' \neq G$ on note $y \in G \setminus G'$ mq $\{k \in \mathbb{Z} : y^k \in G'\} \neq \{0\}$

iii) Soit $H = \langle G', y \rangle$ mq on peut prolonger ψ à H et conclure.

c) Soit $x \in G$ Calculer $\sum_{\varphi \in \hat{G}} \varphi(x)$.

Rq: $\varphi \in \hat{G}$ s'appelle un caractère de G. Très utile pour étudier les représentations de G (que vous verrez en M1).