

---

✧

# ÉQUIVALENCES ORBITALES QUANTITATIVES

---

✧ Amandine Escalier ✧

---

Slides



<https://s.42l.fr/AEConf>

Notes détaillées

# PLAN

CONSTRUIRE DES  
ÉQUIV. ORBITALES À INTÉGRABILITÉ PRESCRITE

# PLAN

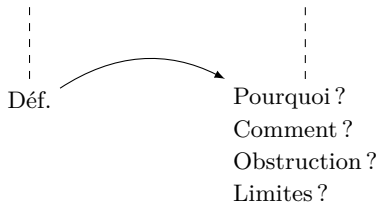
## CONSTRUIRE DES ÉQUIV. ORBITALES À INTÉGRABILITÉ PRESCRITE

Contexte, motivations



# PLAN

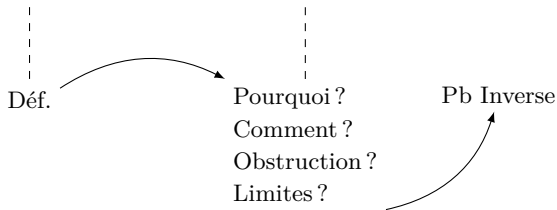
## CONSTRUIRE DES ÉQUIV. ORBITALES À INTÉGRABILITÉ PRESCRITE



Contexte, motivations

# PLAN

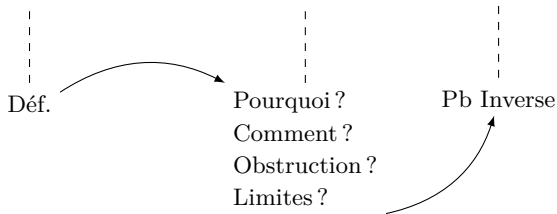
## CONSTRUIRE DES ÉQUIV. ORBITALES À INTÉGRABILITÉ PRESCRITE



Contexte, motivations

# PLAN

## CONSTRUIRE DES ÉQUIV. ORBITALES À INTÉGRABILITÉ PRESCRITE



Contexte, motivations

# PLAN

Outils

## CONSTRUIRE DES ÉQUIV. ORBITALES À INTÉGRABILITÉ PRESCRITE

Déf.

Pourquoi ?  
Comment ?  
Obstruction ?  
Limites ?

Pb Inverse

Contexte, motivations

# PLAN

Outils

Décalages de Følner  
Produits diagonaux

CONSTRUIRE DES

ÉQUIV. ORBITALES À INTÉGRABILITÉ PRESCRITE

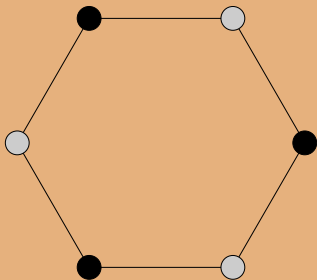
Déf.

Pourquoi ?  
Comment ?  
Obstruction ?  
Limites ?

Pb Inverse

Contexte, motivations

I — Équivalence orbitale



## I.1 — DÉFINITION

**But** Classifier les groupes selon leurs  $\text{act}^\circ$  sur un espace de proba.

## I.1 — DÉFINITION

**But** Classifier les groupes selon leurs  $\text{act}^\circ$  sur un espace de proba.  
Soient  $G = \langle S_G \rangle$  et  $H = \langle S_H \rangle$  deux groupes de type fini.

## I.1 — DÉFINITION

**But** Classifier les groupes selon leurs  $\text{act}^\circ$  sur un espace de proba.  
Soient  $G = \langle S_G \rangle$  et  $H = \langle S_H \rangle$  deux groupes de type fini.

**Définition.**  $G$  et  $H$  sont **orbitalement équivalents**

## I.1 — DÉFINITION

**But** Classifier les groupes selon leurs  $\text{act}^\circ$  sur un espace de proba.

Soient  $G = \langle S_G \rangle$  et  $H = \langle S_H \rangle$  deux groupes de type fini.

**Définition.**  $G$  et  $H$  sont **orbitalement équivalents** s'il existe un espace de proba. standard  $(X, \mu)$

## I.1 — DÉFINITION

**But** Classifier les groupes selon leurs  $\text{act}^\circ$  sur un espace de proba.

Soient  $G = \langle S_G \rangle$  et  $H = \langle S_H \rangle$  deux groupes de type fini.

**Définition.**  $G$  et  $H$  sont **orbitalement équivalents** s'il existe un espace de proba. standard  $(X, \mu)$  tq  $G, H \curvearrowright (X, \mu)$  :

- ▶ librement et en préservant la mesure,  
 $\forall g \in G, \forall A \in \mathcal{B} \quad \mu(g \cdot A) = \mu(A)$

## I.1 — DÉFINITION

**But** Classifier les groupes selon leurs  $\text{act}^\circ$  sur un espace de proba.  
Soient  $G = \langle S_G \rangle$  et  $H = \langle S_H \rangle$  deux groupes de type fini.

**Définition.**  $G$  et  $H$  sont **orbitalement équivalents** s'il existe un espace de proba. standard  $(X, \mu)$  tq  $G, H \curvearrowright (X, \mu)$  :

- ▶ librement et en préservant la mesure,

$$\forall g \in G, \forall A \in \mathcal{B} \quad \mu(g \cdot A) = \mu(A)$$

- ▶ et les actions ont les même orbites  $\text{pp. } x \in X, G \cdot x = H \cdot x$

## I.1 — DÉFINITION

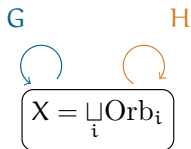
**But** Classifier les groupes selon leurs  $\text{act}^\circ$  sur un espace de proba.  
Soient  $G = \langle S_G \rangle$  et  $H = \langle S_H \rangle$  deux groupes de type fini.

**Définition.**  $G$  et  $H$  sont **orbitalement équivalents** s'il existe un espace de proba. standard  $(X, \mu)$  tq  $G, H \curvearrowright (X, \mu)$  :

- ▶ librement et en préservant la mesure,

$$\forall g \in G, \forall A \in \mathcal{B} \quad \mu(g \cdot A) = \mu(A)$$

- ▶ et les actions ont les même orbites  $\text{pp. } x \in X, G \cdot x = H \cdot x$



## I.1 — OE : CAS MOYENNABLE

**Définition.**  $G$  est moyennable

## I.1 — OE : CAS MOYENNABLE

**Définition.**  $G$  est **moyennable** s'il existe une **suite de Følner** ie. une suite de parties finies  $F_n \subseteq G$  tq.

$$|\partial_{S_G} F_n|/|F_n| \xrightarrow{n} 0.$$

## I.1 — OE : CAS MOYENNABLE

**Définition.**  $G$  est **moyennable** s'il existe une **suite de Følner** ie. une suite de parties finies  $F_n \subseteq G$  tq.

$$|\partial_{S_G} F_n|/|F_n| \xrightarrow{n} 0.$$

**Groupes moyennables :** large famille de groupes aux comportements géométriques très variés.

## I.1 — OE : CAS MOYENNABLE

**Définition.**  $G$  est **moyennable** s'il existe une **suite de Følner** ie. une suite de parties finies  $F_n \subseteq G$  tq.

$$|\partial_{S_G} F_n|/|F_n| \xrightarrow{n} 0.$$

**Groupes moyennables :** large famille de groupes aux comportements géométriques très variés.

**Théorème.** [Ornstein-Weiss, '80] Tout groupe moyennable, infini, de type fini est orbite équivalent à  $\mathbb{Z}$ .

## I.1 — OE : CAS MOYENNABLE

**Définition.**  $G$  est **moyennable** s'il existe une **suite de Følner** ie. une suite de parties finies  $F_n \subseteq G$  tq.

$$|\partial_{S_G} F_n|/|F_n| \xrightarrow{n} 0.$$

**Groupes moyennables** : large famille de groupes aux comportements géométriques très variés.

**Théorème.** [Ornstein-Weiss, '80] Tout groupe moyennable, infini, de type fini est orbite équivalent à  $\mathbb{Z}$ .

→ **Affiner** cette relation d'équivalence pour **distinguer** les groupes moyennables.

## I.2 — QUANTIFICATION : VERS LA DÉFINITION

## I.2 — QUANTIFICATION : VERS LA DÉFINITION

**Définition.** Soit  $G = \langle S_G \rangle \curvearrowright X$ . Le **Graphe de Schreier**  $(X, S_G)$  est le graphe ayant pour

## I.2 — QUANTIFICATION : VERS LA DÉFINITION

**Définition.** Soit  $G = \langle S_G \rangle \curvearrowright X$ . Le **Graphe de Schreier**  $(X, S_G)$  est le graphe ayant pour

- ▶ Sommets  $X$ ;

## I.2 — QUANTIFICATION : VERS LA DÉFINITION

**Définition.** Soit  $G = \langle S_G \rangle \curvearrowright X$ . Le **Graphe de Schreier**  $(X, S_G)$  est le graphe ayant pour

- ▶ Sommets  $X$ ;
- ▶ Arêtes  $\{(x, s \cdot x) \mid x \in X, s \in S_G\}$ .

## I.2 — QUANTIFICATION : VERS LA DÉFINITION

**Définition.** Soit  $G = \langle S_G \rangle \curvearrowright X$ . Le **Graphe de Schreier**  $(X, S_G)$  est le graphe ayant pour

- ▶ Sommets  $X$ ;
- ▶ Arêtes  $\{(x, s \cdot x) \mid x \in X, s \in S_G\}$ .

**Réprésenter l'action de  $G$  sur  $X$  par un graphe.**

## I.2 — QUANTIFICATION : VERS LA DÉFINITION

**Définition.** Soit  $G = \langle S_G \rangle \curvearrowright X$ . Le **Graphe de Schreier**  $(X, S_G)$  est le graphe ayant pour

- ▶ Sommets  $X$ ;
- ▶ Arêtes  $\{(x, s \cdot x) \mid x \in X, s \in S_G\}$ .

**Réprésenter l'action de  $G$  sur  $X$  par un graphe.  
Munir  $X$  d'une distance.**

## I.2 — QUANTIFICATION : VERS LA DÉFINITION

**Définition.** Soit  $G = \langle S_G \rangle \curvearrowright X$ . Le **Graphe de Schreier**  $(X, S_G)$  est le graphe ayant pour

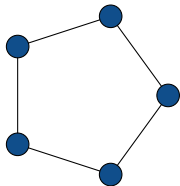
- ▶ Sommets  $X$ ;
- ▶ Arêtes  $\{(x, s \cdot x) \mid x \in X, s \in S_G\}$ .

**Réprésenter l'action de  $G$  sur  $X$  par un graphe.  
Munir  $X$  d'une distance.**

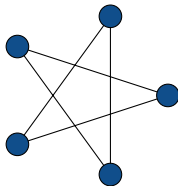
**Ex.** Graphe de Cayley  $(G, S_G)$ .

## I.2 — QUANTIFICATION : VERS LA DÉFINITION

## I.2 — QUANTIFICATION : VERS LA DÉFINITION

**Exemple**

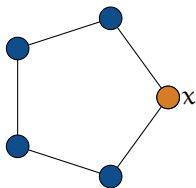
$$(X, S_G = \{\pm g\})$$



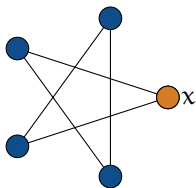
$$(X, S_H = \{\pm h\})$$

## I.2 — QUANTIFICATION : VERS LA DÉFINITION

## Exemple



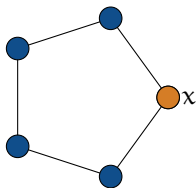
$$(X, S_G = \{\pm g\})$$



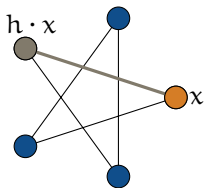
$$(X, S_H = \{\pm h\})$$

## I.2 — QUANTIFICATION : VERS LA DÉFINITION

## Exemple



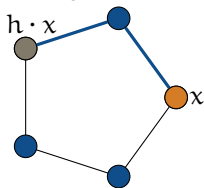
$$(X, S_G = \{\pm g\})$$



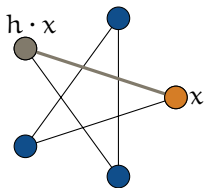
$$(X, S_H = \{\pm h\})$$

## I.2 — QUANTIFICATION : VERS LA DÉFINITION

**Exemple**  $d_{S_G}(x, h \cdot x) = 2$



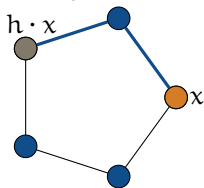
$(X, S_G = \{\pm g\})$



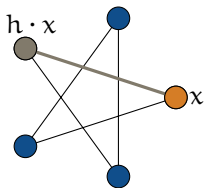
$(X, S_H = \{\pm h\})$

## I.2 — QUANTIFICATION : VERS LA DÉFINITION

**Exemple**  $d_{S_G}(x, h \cdot x) = 2$



$(X, S_G = \{\pm g\})$

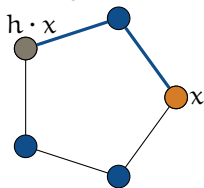


$(X, S_H = \{\pm h\})$

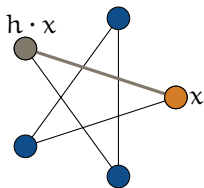
$d_{S_G}(x, h \cdot x)$  finie ?

## I.2 — QUANTIFICATION : VERS LA DÉFINITION

**Exemple**  $d_{S_G}(x, h \cdot x) = 2$



$(X, S_G = \{\pm g\})$

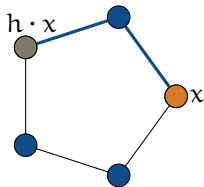


$(X, S_H = \{\pm h\})$

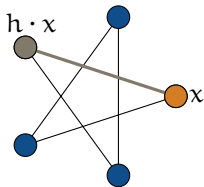
$d_{S_G}(x, h \cdot x)$  **finie**?  $x \mapsto d_{S_G}(x, h \cdot x)$  dans  $LP$ ?

## I.2 — QUANTIFICATION : VERS LA DÉFINITION

**Exemple**  $|c(h, x)|_{S_G} = 2$



$(X, S_G = \{\pm g\})$



$(X, S_H = \{\pm h\})$

$|c(h, x)|_{S_G}$  finie ?  $x \mapsto c(h, x)$  dans  $L^p$  ?

## I.2 — QUANTIFICATION : DÉFINITION

**Définition.** On dit que l'on a une équivalence orbitale  $(L^p, L^q)$ -**intégrable** de  $G$  vers  $H$  si pour tout  $g \in G$  et  $h \in H$ ,

$$\int_X \left( d_{S_H}(x, g \cdot x) \right)^p d\mu < \infty \quad \int_X \left( d_{S_G}(x, h \cdot x) \right)^q d\mu < \infty.$$

**Rq.**  $L^0$  signifie : OE sans condition d'intégrabilité

## I.2 — QUANTIFICATION : DÉFINITION

Soient  $\varphi, \psi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  deux fonctions croissantes non-bornées.

[Delabie, Koivisto, Le Maître, Tessera]

**Définition.** On dit que l'on a une équivalence orbitale  **$(\varphi, \psi)$ -intégrable** de  $G$  vers  $H$  si pour tout  $g \in G$  et  $h \in H$ ,

$$\int_X \varphi\left(d_{S_H}(x, g \cdot x)\right) d\mu < \infty \quad \int_X \psi\left(d_{S_G}(x, h \cdot x)\right) d\mu < \infty.$$

**Rq.**  $L^0$  signifie : OE sans condition d'intégrabilité

**Abrév.**  $G$   $(\varphi, \psi)$ -OE  $H$ .

## I.2 — QUANTIFICATION : DÉFINITION

Soient  $\varphi, \psi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  deux fonctions croissantes non-bornées.

[Delabie, Koivisto, Le Maître, Tessera]

**Définition.** On dit que l'on a une équivalence orbitale  $(\varphi, \psi)$ -**intégrable** de  $G$  vers  $H$  si pour tout  $g \in G$  et  $h \in H$ , il existe  $C_g, C_H > 0$

$$\int_X \varphi\left(C_g d_{S_H}(x, g \cdot x)\right) d\mu < \infty \quad \int_X \psi\left(C_H d_{S_G}(x, h \cdot x)\right) d\mu < \infty.$$

**Rq.**  $L^0$  signifie : OE sans condition d'intégrabilité

**Abrév.**  $G$   $(\varphi, \psi)$ -OE  $H$ .

## I.2 — QUANTIFICATION : DÉFINITION

Soient  $\varphi, \psi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  deux fonctions croissantes non-bornées.

[Delabie, Koivisto, Le Maître, Tessera]

**Définition.** On dit que l'on a une équivalence orbitale  $(\varphi, \psi)$ -**intégrable** de  $G$  vers  $H$  si pour tout  $g \in G$  et  $h \in H$ , il existe  $C_g, C_H > 0$

$$\int_X \varphi\left(C_g d_{S_H}(x, g \cdot x)\right) d\mu < \infty \quad \int_X \psi\left(C_H d_{S_G}(x, h \cdot x)\right) d\mu < \infty.$$

**Rq.**  $L^0$  signifie : OE sans condition d'intégrabilité

**Abrév.**  $G$   $(\varphi, \psi)$ -OE  $H$ .

L'OE est  **$L^\infty$ -intégrable** si  $x \mapsto d_{S_H}(x, g \cdot x)$  et  $x \mapsto d_{S_G}(x, h \cdot x)$  sont essentiellement bornées.

## I.2 — QUANTIFICATION : EXEMPLE

## I.2 — QUANTIFICATION : EXEMPLE

**Théorème.** [DKLMT] Pour tout  $p < 1/2$  et  $q < 2$ , il existe une  $(L^p, L^q)$ -OE de  $\mathbb{Z}^2$  vers  $\mathbb{Z}$ .

## I.2 — QUANTIFICATION : EXEMPLE

**Théorème.** [DKLMT] Pour tout  $p < 1/2$  et  $q < 2$ , il existe une  $(L^p, L^q)$ -OE de  $\mathbb{Z}^2$  vers  $\mathbb{Z}$ .

Les actions :

$$\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \{0, 1, 2, 3\}^{\mathbb{N}} \curvearrowright \mathbb{Z}.$$

## I.2 — QUANTIFICATION : EXEMPLE

**Théorème.** [DKLMT] Pour tout  $p < 1/2$  et  $q < 2$ , il existe une  $(L^p, L^q)$ -OE de  $\mathbb{Z}^2$  vers  $\mathbb{Z}$ .

Les actions :

$$\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \{0, 1, 2, 3\}^{\mathbb{N}} \curvearrowright \mathbb{Z}.$$

→ Comment l'OE quantitative se comporte-t-elle vis-à-vis de la géométrie ?

## I.3 — OBSTRUCTION...

**Définition.** Le **Profil Isopérimétrique** de  $G$  est défini comme

$$I_G(n) := \sup_{A \subset G, |A| \leq n} |A| / |\partial_{S_G} A|.$$

## I.3 — OBSTRUCTION...

**Définition.** Le **Profil Isopérimétrique** de  $G$  est défini comme

$$I_G(\mathfrak{n}) := \sup_{A \subset G, |A| \leq \mathfrak{n}} |A| / |\partial_{S_G} A|.$$

**Rq** Moyennable  $\Leftrightarrow$  Suite de Følner  $\Leftrightarrow I_G(\mathfrak{n}) \rightarrow +\infty$ .

## I.3 — OBSTRUCTION...

**Définition.** Le **Profil Isopérimétrique** de  $G$  est défini comme

$$I_G(\mathfrak{n}) := \sup_{A \subset G, |A| \leq \mathfrak{n}} |A| / |\partial_{S_G} A|.$$

**Rq** Moyennable  $\Leftrightarrow$  Suite de Følner  $\Leftrightarrow I_G(\mathfrak{n}) \rightarrow +\infty$ .

**Théorème.** [Delabie et al., '20] S'il existe une  $(\varphi, L^0)$ -OE de  $G$  vers  $H$  et si  $\varphi$  et  $t/\varphi(t)$  sont croissantes alors

## I.3 — OBSTRUCTION...

**Définition.** Le **Profil Isopérimétrique** de  $G$  est défini comme

$$I_G(\mathfrak{n}) := \sup_{A \subset G, |A| \leq \mathfrak{n}} |A| / |\partial_{S_G} A|.$$

**Rq** Moyennable  $\Leftrightarrow$  Suite de Følner  $\Leftrightarrow I_G(\mathfrak{n}) \rightarrow +\infty$ .

**Théorème.** [Delabie et al., '20] S'il existe une  $(\varphi, L^0)$ -OE de  $G$  vers  $H$  et si  $\varphi$  et  $t/\varphi(t)$  sont croissantes alors

$$\varphi \circ I_H \preceq I_G.$$

## I.3 — OBSTRUCTION...

**Définition.** Le **Profil Isopérimétrique** de  $G$  est défini comme

$$I_G(\mathfrak{n}) := \sup_{A \subset G, |A| \leq \mathfrak{n}} |A| / |\partial_{S_G} A|.$$

**Rq** Moyennable  $\Leftrightarrow$  Suite de Følner  $\Leftrightarrow I_G(\mathfrak{n}) \rightarrow +\infty$ .

**Théorème.** [Delabie et al., '20] S'il existe une  $(\varphi, L^0)$ -OE de  $G$  vers  $H$  et si  $\varphi$  et  $t/\varphi(t)$  sont croissantes alors

$$\varphi \circ I_H \preceq I_G.$$

**Application** Si  $G = \mathbb{Z}^2$  et  $H = \mathbb{Z}$  alors

## I.3 — OBSTRUCTION...

**Définition.** Le **Profil Isopérimétrique** de  $G$  est défini comme

$$I_G(n) := \sup_{A \subset G, |A| \leq n} |A| / |\partial_{S_G} A|.$$

**Rq** Moyennable  $\Leftrightarrow$  Suite de Følner  $\Leftrightarrow I_G(n) \rightarrow +\infty$ .

**Théorème.** [Delabie et al., '20] S'il existe une  $(\varphi, L^0)$ -OE de  $G$  vers  $H$  et si  $\varphi$  et  $t/\varphi(t)$  sont croissantes alors

$$\varphi \circ I_H \preceq I_G.$$

**Application** Si  $G = \mathbb{Z}^2$  et  $H = \mathbb{Z}$  alors  $I_G(x) \sim x^{1/2}$ ,  $I_H(x) \sim x$ .

## I.3 — OBSTRUCTION...

**Définition.** Le **Profil Isopérimétrique** de  $G$  est défini comme

$$I_G(n) := \sup_{A \subset G, |A| \leq n} |A| / |\partial_{S_G} A|.$$

**Rq** Moyennable  $\Leftrightarrow$  Suite de Følner  $\Leftrightarrow I_G(n) \rightarrow +\infty$ .

**Théorème.** [Delabie et al., '20] S'il existe une  $(\varphi, L^0)$ -OE de  $G$  vers  $H$  et si  $\varphi$  et  $t/\varphi(t)$  sont croissantes alors

$$\varphi \circ I_H \preceq I_G.$$

**Application** Si  $G = \mathbb{Z}^2$  et  $H = \mathbb{Z}$  alors  $I_G(x) \sim x^{1/2}$ ,  $I_H(x) \sim x$ .  
Donc  $\varphi(x) = x^{1/2}$  est la « meilleure » intégrabilité possible.

## I.3 — OBSTRUCTION...

**Théorème.** [Delabie et al., '20] S'il existe une  $(\varphi, L^0)$ -OE de  $G$  vers  $H$  et si  $\varphi$  et  $t/\varphi(t)$  sont croissantes alors

$$\varphi \circ I_H \preceq I_G.$$

**Application** Si  $G = \mathbb{Z}^2$  et  $H = \mathbb{Z}$  alors  $I_G(x) \sim x^{1/2}$ ,  $I_H(x) \sim x$ .  
Donc  $\varphi(x) = x^{1/2}$  est la meilleure intégrabilité possible.

## I.3 — OBSTRUCTION...

**Théorème.** [Delabie et al., '20] S'il existe une  $(\varphi, L^0)$ -OE de  $G$  vers  $H$  et si  $\varphi$  et  $t/\varphi(t)$  sont croissantes alors

$$\varphi \circ I_H \preceq I_G.$$

**Application** Si  $G = \mathbb{Z}^2$  et  $H = \mathbb{Z}$  alors  $I_G(x) \sim x^{1/2}$ ,  $I_H(x) \sim x$ .  
Donc  $\varphi(x) = x^{1/2}$  est la meilleure intégrabilité possible. Or,

## I.3 — OBSTRUCTION...

**Théorème.** [Delabie et al., '20] S'il existe une  $(\varphi, L^0)$ -OE de  $G$  vers  $H$  et si  $\varphi$  et  $t/\varphi(t)$  sont croissantes alors

$$\varphi \circ I_H \preceq I_G.$$

**Application** Si  $G = \mathbb{Z}^2$  et  $H = \mathbb{Z}$  alors  $I_G(x) \sim x^{1/2}$ ,  $I_H(x) \sim x$ .  
Donc  $\varphi(x) = x^{1/2}$  est la meilleure intégrabilité possible. Or,

**Théorème.** [DKLMT] Pour tout  $p < 1/2$  et  $q < 2$ , il existe une  $(L^p, L^q)$ -OE de  $\mathbb{Z}^2$  vers  $\mathbb{Z}$ .

## I.3 — OBSTRUCTION...

**Théorème.** [Delabie et al., '20] S'il existe une  $(\varphi, L^0)$ -OE de  $G$  vers  $H$  et si  $\varphi$  et  $t/\varphi(t)$  sont croissantes alors

$$\varphi \circ I_H \preceq I_G.$$

**Application** Si  $G = \mathbb{Z}^2$  et  $H = \mathbb{Z}$  alors  $I_G(x) \sim x^{1/2}$ ,  $I_H(x) \sim x$ .  
Donc  $\varphi(x) = x^{1/2}$  est la meilleure intégrabilité possible. Or,

**Théorème.** [DKLMT] Pour tout  $p < 1/2$  et  $q < 2$ , il existe une  $(L^p, L^q)$ -OE de  $\mathbb{Z}^2$  vers  $\mathbb{Z}$ .

**Th.** [Correia, '24] Ceci est optimal

## I.3 — ... ET PROBLÈME INVERSE

### Motivation

- ▶ Le profil fournit une borne sup à l'intégrabilité.

## I.3 — ... ET PROBLÈME INVERSE

### Motivation

- ▶ Le profil fournit une borne sup à l'intégrabilité.
- ▶ (Brieussel-Zheng) construction de groupe à profil **prescrit**.

## I.3 — ... ET PROBLÈME INVERSE

### Motivation

- ▶ Le profil fournit une borne sup à l'intégrabilité.
- ▶ (Briussel-Zheng) construction de groupe à profil **prescrit**.

Étant donné  $H$  un gr et une  $f^\circ$  croissante  $\varphi$ .

## I.3 — ... ET PROBLÈME INVERSE

### Motivation

- ▶ Le profil fournit une borne sup à l'intégrabilité.
- ▶ (Brioussin-Zheng) construction de groupe à profil **prescrit**.

Étant donné  $H$  un gr et une  $f^\circ$  croissante  $\varphi$ . Peut-on trouver un groupe  $G$  et

## I.3 — ... ET PROBLÈME INVERSE

### Motivation

- ▶ Le profil fournit une borne sup à l'intégrabilité.
- ▶ (Brioussin-Zheng) construction de groupe à profil **prescrit**.

Étant donné  $H$  un gr et une  $f^\circ$  croissante  $\varphi$ . Peut-on trouver un groupe  $G$  et une  $(\varphi, L^0)$ -OE de  $G$  vers  $H$  tq.

## I.3 — ... ET PROBLÈME INVERSE

### Motivation

- ▶ Le profil fournit une borne sup à l'intégrabilité.
- ▶ (Brioussell-Zheng) construction de groupe à profil **prescrit**.

Étant donné  $H$  un gr et une f<sup>o</sup> croissante  $\varphi$ . Peut-on trouver un groupe  $G$  et une  $(\varphi, L^0)$ -OE de  $G$  vers  $H$  tq.  $G$  a un profil isopérimétrique optimal, *ie.*

$$\varphi \circ I_H \sim I_G ?$$

## I.3 — ... ET PROBLÈME INVERSE

### Motivation

- ▶ Le profil fournit une borne sup à l'intégrabilité.
- ▶ (Briussel-Zheng) construction de groupe à profil **prescrit**.

Étant donné  $H$  un gr et une f<sup>o</sup> croissante  $\varphi$ . Peut-on trouver un groupe  $G$  et une  $(\varphi, L^0)$ -OE de  $G$  vers  $H$  tq.  $G$  a un profil isopérimétrique optimal, *ie.*

$$\varphi \circ I_H \sim I_G ?$$

Quantifie la diversité ergodique des grp moyennables

Pour  $H = \mathbb{Z}$ .

**Théorème.** [But théorique] Pour toute fonction croissante continue  $\varphi$  il existe  $G$  tq.

Pour  $H = \mathbb{Z}$ .

**Théorème.** [But théorique] Pour toute fonction croissante continue  $\varphi$  il existe  $G$  tq.

- ▶  $I_G \simeq \varphi$ . [Brieussel-Zheng]
- ▶ ..... il existe une  $(\varphi_{\dots}, L^0)$ -OE de  $G$  vers  $\mathbb{Z}$  .....

Pour  $H = \mathbb{Z}$ .

**Théorème.** [Résultat obtenu] Pour toute fonction croissante continue  $\varphi$  *plus lente*<sup>1</sup> qu'un log il existe  $G$  tq.

- ▶  $I_G \simeq \varphi$ . [Brieussel-Zheng]
- ▶ pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une  $(\varphi_\varepsilon, L^0)$ -OE de  $G$  vers  $\mathbb{Z}$  où  $\varphi_\varepsilon = \varphi / (\log \circ \varphi)^{1+\varepsilon}$ .

Pour  $H = \mathbb{Z}$ .

**Théorème.** [E., '24] Pour toute fonction croissante continue  $\varphi$  *plus lente*<sup>1</sup> qu'un log il existe  $G$  tq.

- ▶  $I_G \simeq \varphi$ . [Brieussel-Zheng]
- ▶ pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une  $(\varphi_\varepsilon, \exp \circ \rho)$ -OE de  $G$  vers  $\mathbb{Z}$  où  $\varphi_\varepsilon = \varphi / (\log \circ \varphi)^{1+\varepsilon}$ .

<sup>1</sup>  $\varphi = \rho \circ \log$  tq.  $\rho : [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$  continue,  $\rho$  et  $x \mapsto x/\rho(x)$  sont croissantes.

Pour  $H = \mathbb{Z}$ .

**Théorème.** [E., '24] Pour toute fonction croissante continue  $\varphi$  *plus lente*<sup>1</sup> qu'un log il existe  $G$  tq.

- ▶  $I_G \simeq \varphi$ . [Brieussel-Zheng]
- ▶ pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une  $(\varphi_\varepsilon, \exp \circ \rho)$ -OE de  $G$  vers  $\mathbb{Z}$  où  $\varphi_\varepsilon = \varphi / (\log \circ \varphi)^{1+\varepsilon}$ .

<sup>1</sup>  $\varphi = \rho \circ \log$  tq.  $\rho : [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$  continue,  $\rho$  et  $x \mapsto x/\rho(x)$  sont croissantes.

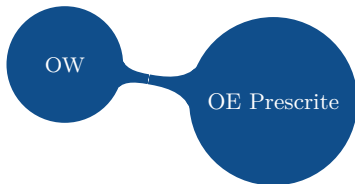
**Théorème.** [Correia, '24] Ce résultat est optimal.

# RÉCAPITULATIF

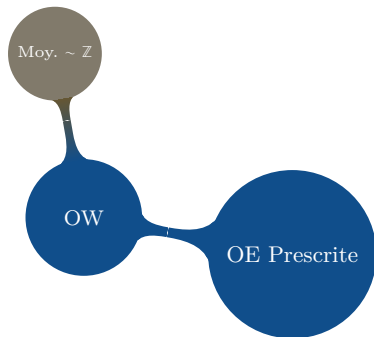


OE Prescrite

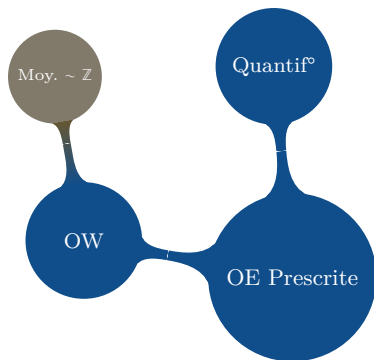
# RÉCAPITULATIF



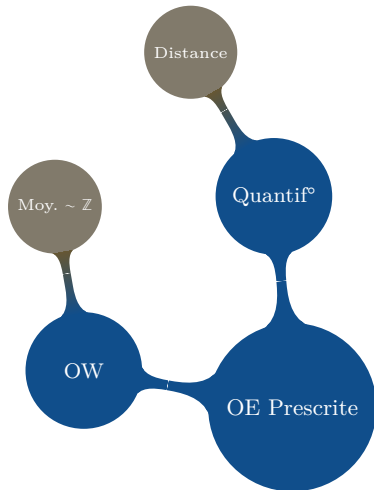
# RÉCAPITULATIF



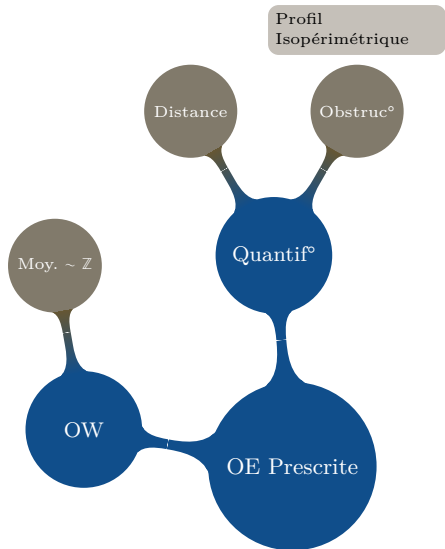
# RÉCAPITULATIF



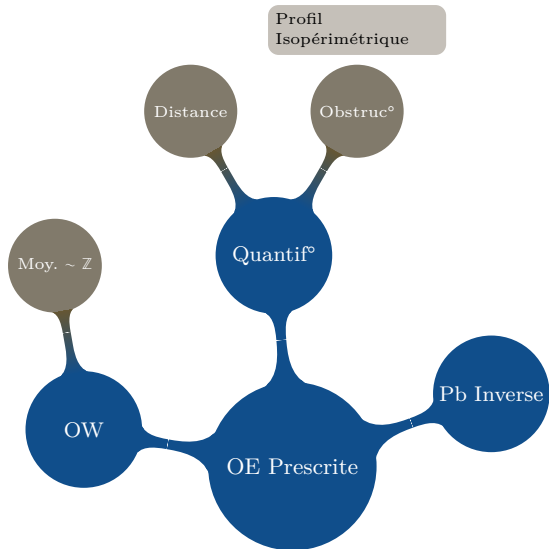
# RÉCAPITULATIF



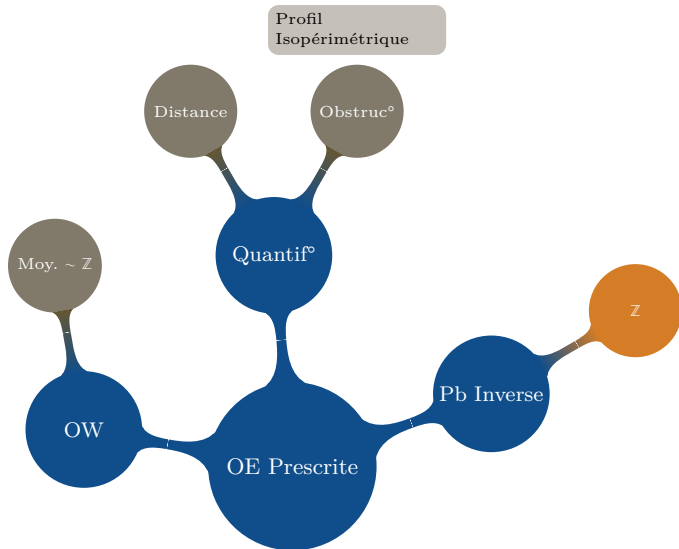
# RÉCAPITULATIF



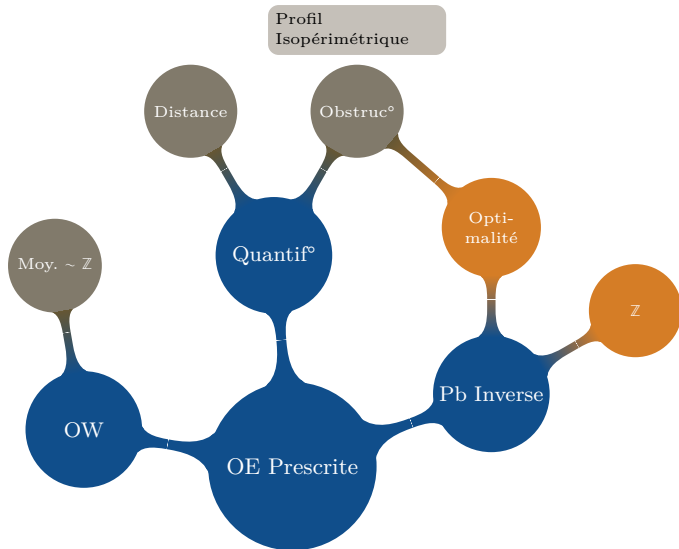
# RÉCAPITULATIF



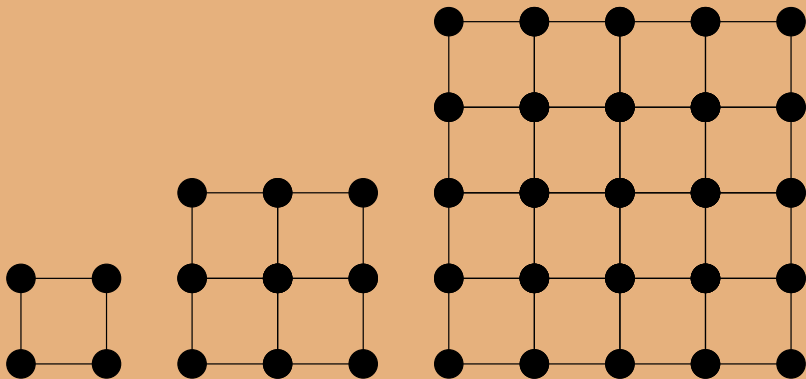
# RÉCAPITULATIF



# RÉCAPITULATIF



## II — Construction



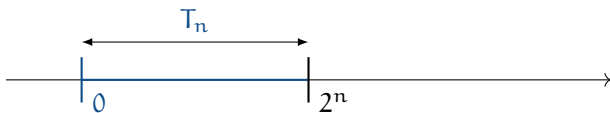
## II.1 — SUITES PAVANTES

## II.1 — SUITES PAVANTES

**Exemple** Soit  $G = \mathbb{Z}$  et  $T_n := [0, 2^n - 1]$ .

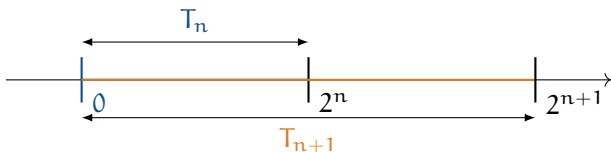
## II.1 — SUITES PAVANTES

**Exemple** Soit  $G = \mathbb{Z}$  et  $T_n := [0, 2^n - 1]$ .



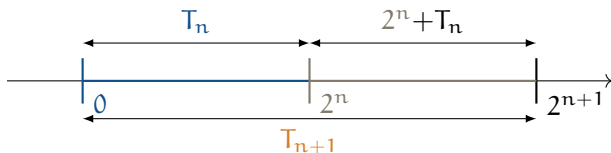
## II.1 — SUITES PAVANTES

**Exemple** Soit  $G = \mathbb{Z}$  et  $T_n := [0, 2^n - 1]$ .



## II.1 — SUITES PAVANTES

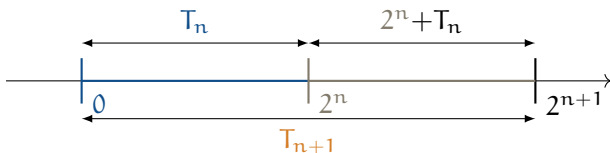
**Exemple** Soit  $G = \mathbb{Z}$  et  $T_n := [0, 2^n - 1]$ .



## II.1 — SUITES PAVANTES

**Exemple** Soit  $G = \mathbb{Z}$  et  $T_n := [0, 2^n - 1]$ .

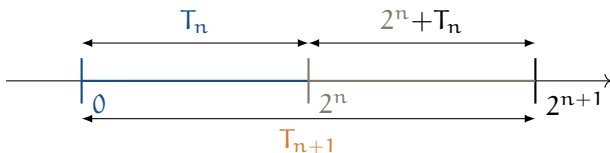
$$T_{n+1} = T_n \sqcup (2^n + T_n).$$



## II.1 — SUITES PAVANTES

**Exemple** Soit  $G = \mathbb{Z}$  et  $T_n := [0, 2^n - 1]$ .

$$T_{n+1} = T_n \sqcup (2^n + T_n).$$

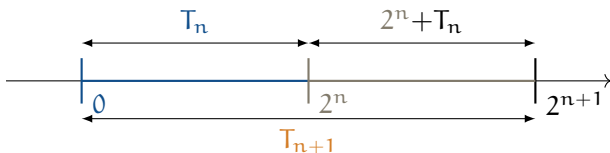


► Soit  $\Sigma_{n+1} := \{0, 2^n\}$ .

## II.1 — SUITES PAVANTES

**Exemple** Soit  $G = \mathbb{Z}$  et  $T_n := [0, 2^n - 1]$ .

$$T_{n+1} = T_n \sqcup (2^n + T_n).$$



- ▶ Soit  $\Sigma_{n+1} := \{0, 2^n\}$ .
- ▶ Alors  $T_{n+1} = \Sigma_{n+1} + T_n$ .

## II.1 – SUITES PAVANTES : DÉFINITION

Soit  $G$  moyennable

## II.1 – SUITES PAVANTES : DÉFINITION

Soit  $G$  moyennable et  $\Sigma_n \subset G$  fini pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## II.1 – SUITES PAVANTES : DÉFINITION

Soit  $G$  moyennable et  $\Sigma_n \subset G$  fini pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Soit  $T_0 := \Sigma_0$  et  $T_{n+1} := \Sigma_{n+1} T_n$ .

## II.1 – SUITES PAVANTES : DÉFINITION

Soit  $G$  moyennable et  $\Sigma_n \subset G$  fini pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Soit  $T_0 := \Sigma_0$  et  $T_{n+1} := \Sigma_{n+1}T_n$ .

**Définition.** On dit que  $(\Sigma_n)_n$  est une  $(R_n, \varepsilon_n)$ -suite pavant un Følner si

## II.1 – SUITES PAVANTES : DÉFINITION

Soit  $G$  moyennable et  $\Sigma_n \subset G$  fini pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Soit  $T_0 := \Sigma_0$  et  $T_{n+1} := \Sigma_{n+1} T_n$ .

**Définition.** On dit que  $(\Sigma_n)_n$  est une  $(R_n, \varepsilon_n)$ -suite pavant un Følner si

- ▶ [Følner]  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Følner,  
ie.  $|\partial T_n|/|T_n| \rightarrow 0$ ;

## II.1 – SUITES PAVANTES : DÉFINITION

Soit  $G$  moyennable et  $\Sigma_n \subset G$  fini pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Soit  $T_0 := \Sigma_0$  et  $T_{n+1} := \Sigma_{n+1} T_n$ .

**Définition.** On dit que  $(\Sigma_n)_n$  est une  $(R_n, \varepsilon_n)$ -suite pavant un Følner si

- ▶ [Følner]  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Følner, *ie.*  $|\partial T_n|/|T_n| \rightarrow 0$ ;
- ▶ [Pavage]  $T_{n+1} = \sqcup_{\sigma \in \Sigma_{n+1}} \sigma T_n$ ,

## II.1 – SUITES PAVANTES : DÉFINITION

Soit  $G$  moyennable et  $\Sigma_n \subset G$  fini pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

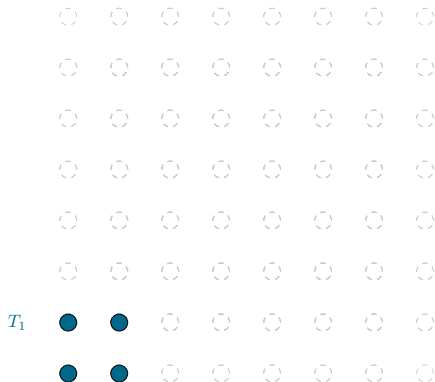
Soit  $T_0 := \Sigma_0$  et  $T_{n+1} := \Sigma_{n+1} T_n$ .

**Définition.** On dit que  $(\Sigma_n)_n$  est une  $(R_n, \varepsilon_n)$ -suite pavant un Følner si

- ▶ [Følner]  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Følner,   
 *ie.*  $|\partial T_n|/|T_n| \rightarrow 0$ ;
- ▶ [Pavage]  $T_{n+1} = \sqcup_{\sigma \in \Sigma_{n+1}} \sigma T_n$ ,
- ▶ [Quantif<sup>o</sup>]  $\text{diam}(T_n) \leq R_n$  et  $|\partial T_n|/|T_n| \leq \varepsilon_n$ .

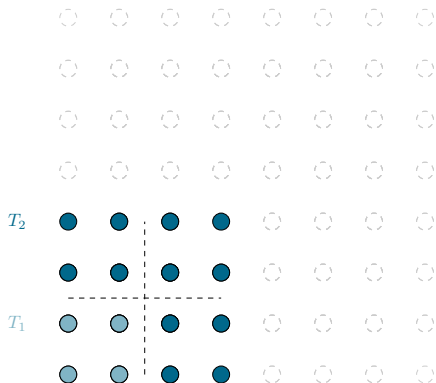
## II.1 – SUITES PAVANTES : EXEMPLE

Soit  $G = \mathbb{Z}^2$  et  $T_n := [0, 2^n - 1] \times [0, 2^n - 1]$ .



## II.1 – SUITES PAVANTES : EXEMPLE

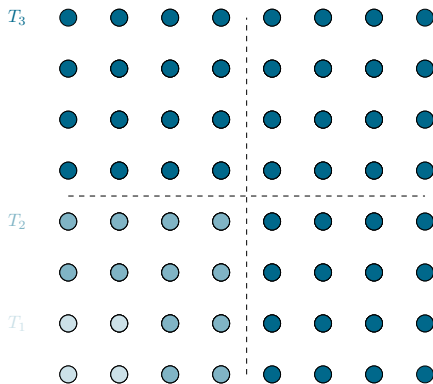
Soit  $G = \mathbb{Z}^2$  et  $T_n := [0, 2^n - 1] \times [0, 2^n - 1]$ .



$$\Sigma_2 = \{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2)\}$$

## II.1 – SUITES PAVANTES : EXEMPLE

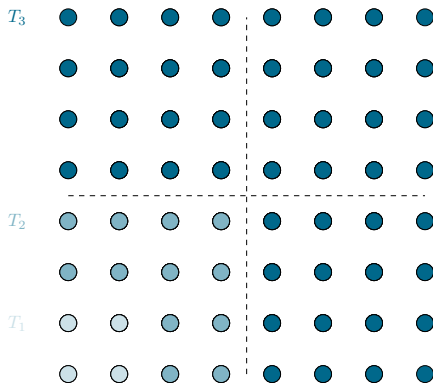
Soit  $G = \mathbb{Z}^2$  et  $T_n := [0, 2^n - 1] \times [0, 2^n - 1]$ .



$$\Sigma_3 = \{(0, 0), (0, 2^2), (2^2, 0), (2^2, 2^2)\}$$

## II.1 – SUITES PAVANTES : EXEMPLE

Soit  $G = \mathbb{Z}^2$  et  $T_n := [0, 2^n - 1] \times [0, 2^n - 1]$ .



$$\Sigma_{n+1} := \{(0, 0), (0, 2^n), (2^n, 0), (2^n, 2^n)\}$$

## II.1 — SUITES PAVANTES : EXEMPLES

Soit  $H = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$

► un élément de  $H$  est de la forme :  $((\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}}, t)$

avec  $t \in \mathbb{Z}$  et  $\sigma_i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  pour tout  $i$ .

## II.1 — SUITES PAVANTES : EXEMPLES

Soit  $H = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$

► un élément de  $H$  est de la forme :  $((\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}}, t)$

avec  $t \in \mathbb{Z}$  et  $\sigma_i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  pour tout  $i$ .

$$T_n := \left\{ \left( (\varepsilon_i)_i, t \right) : t \in [0, 2^n - 1], \text{supp}((\varepsilon_i)_i) \subseteq [0, 2^n - 1] \right\}.$$

## II.1 — SUITES PAVANTES : EXEMPLES

Soit  $H = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$

► un élément de  $H$  est de la forme :  $((\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}}, t)$

avec  $t \in \mathbb{Z}$  et  $\sigma_i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  pour tout  $i$ .

$$T_n := \left\{ \left( (\varepsilon_i)_i, t \right) : t \in [0, 2^n - 1], \text{supp}((\varepsilon_i)_i) \subseteq [0, 2^n - 1] \right\}.$$

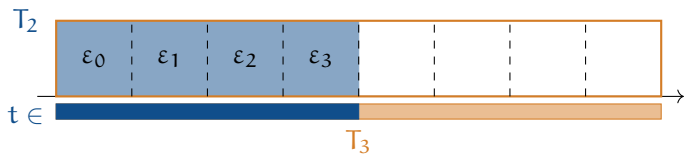


## II.1 — SUITES PAVANTES : EXEMPLES

Soit  $H = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$

► un élément de  $H$  est de la forme :  $((\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}}, t)$   
avec  $t \in \mathbb{Z}$  et  $\sigma_i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  pour tout  $i$ .

$$T_n := \left\{ \left( (\varepsilon_i)_i, t \right) : t \in [0, 2^n - 1], \text{supp}((\varepsilon_i)_i) \subseteq [0, 2^n - 1] \right\}.$$



## II.1 — SUITES PAVANTES : EXEMPLES

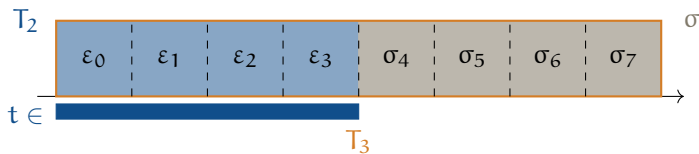
Soit  $H = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$

► un élément de  $H$  est de la forme :  $((\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}}, t)$   
avec  $t \in \mathbb{Z}$  et  $\sigma_i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  pour tout  $i$ .

$$T_n := \left\{ \left( (\varepsilon_i)_i, t \right) : t \in [0, 2^n - 1], \text{supp}((\varepsilon_i)_i) \subseteq [0, 2^n - 1] \right\}.$$

$$\Sigma_{n+1} := \left\{ ((\sigma_i)_i, 0) \mid \text{supp}((\sigma_i)_i) \subseteq [2^n, 2^{n+1} - 1] \right\}$$

□



## II.1 — SUITES PAVANTES : EXEMPLES

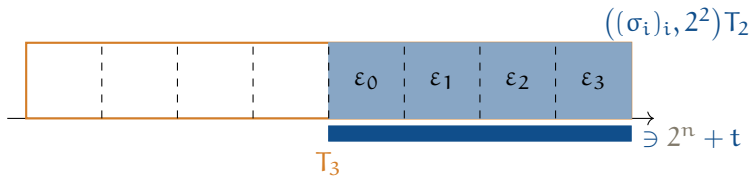
Soit  $H = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$

► un élément de  $H$  est de la forme :  $((\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}}, t)$   
avec  $t \in \mathbb{Z}$  et  $\sigma_i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  pour tout  $i$ .

$$T_n := \left\{ ((\varepsilon_i)_i, t) : t \in [0, 2^n - 1], \text{supp}((\varepsilon_i)_i) \subseteq [0, 2^n - 1] \right\}.$$

$$\Sigma_{n+1} := \left\{ ((\sigma_i)_i, 0) \mid \text{supp}((\sigma_i)_i) \subseteq [2^n, 2^{n+1} - 1] \right\}$$

□



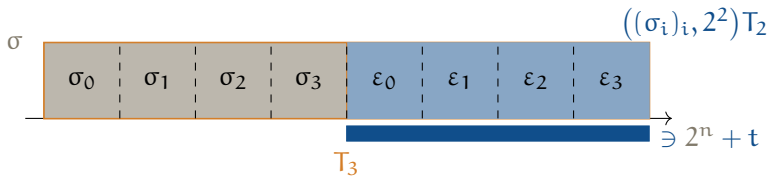
## II.1 — SUITES PAVANTES : EXEMPLES

Soit  $H = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$

► un élément de  $H$  est de la forme :  $((\sigma_i)_{i \in \mathbb{Z}}, t)$   
avec  $t \in \mathbb{Z}$  et  $\sigma_i \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  pour tout  $i$ .

$$T_n := \left\{ \left( (\varepsilon_i)_i, t \right) : t \in [0, 2^n - 1], \text{supp}((\varepsilon_i)_i) \subseteq [0, 2^n - 1] \right\}.$$

$$\Sigma_{n+1} := \left\{ \left( (\sigma_i)_i, 0 \right) \mid \text{supp}((\sigma_i)_i) \subseteq [2^n, 2^{n+1} - 1] \right\} \\ \sqcup \left\{ \left( (\sigma_i)_i, 2^n \right) \mid \text{supp}((\sigma_i)_i) \subseteq [0, 2^n - 1] \right\}$$



## II.2 — QUANTIFICATION

Soient  $(\Sigma_n)_n$  une  $(R_n, \varepsilon_n)$ -suite pavant un Følner de  $G$ ,  
 $(\Sigma'_n)_n$  une  $(R'_n, \varepsilon'_n)$ -suite pavant un Følner de  $H$ .

## II.2 — QUANTIFICATION

Soient  $(\Sigma_n)_n$  une  $(R_n, \varepsilon_n)$ -suite pavant un Følner de  $G$ ,  
 $(\Sigma'_n)_n$  une  $(R'_n, \varepsilon'_n)$ -suite pavant un Følner de  $H$ .

**Théorème.** [DKLMT]

Si  $|\Sigma_n| = |\Sigma'_n|$ , alors  $G$  et  $H$  sont OE sur  $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ .

## II.2 — QUANTIFICATION

Soient  $(\Sigma_n)_n$  une  $(R_n, \varepsilon_n)$ -suite pavant un Følner de  $G$ ,  
 $(\Sigma'_n)_n$  une  $(R'_n, \varepsilon'_n)$ -suite pavant un Følner de  $H$ .

**Théorème.** [DKLMT]

Si  $|\Sigma_n| = |\Sigma'_n|$ , alors  $G$  et  $H$  sont OE sur  $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ .

Si la suite suivante est sommable

$$(\varphi(R'_n) \varepsilon_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$$

alors l'OE de  $G$  vers  $H$  est  $(\varphi, L^0)$ -intégrable.

## II.2 — QUANTIFICATION

Soient  $(\Sigma_n)_n$  une  $(R_n, \varepsilon_n)$ -suite pavant un Følner de  $G$ ,  
 $(\Sigma'_n)_n$  une  $(R'_n, \varepsilon'_n)$ -suite pavant un Følner de  $H$ .

**Théorème.** [DKLMT]

Si  $|\Sigma_n| = |\Sigma'_n|$  alors  $G$  et  $H$  sont OE sur  $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ .

Si la suite suivante est **sommable**

$$(\varphi(2R'_n) (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n))_{n \in \mathbb{N}}$$

alors l'OE de  $G$  vers  $H$  est  $(\varphi, L^0)$ -intégrable.

**Si  $|\Sigma_n| = |\Sigma'_n|$  : critère d'intégrabilité faisant intervenir les diamètres des tuiles et  $\varepsilon_n, \varepsilon'_n$ .**

## II.3 — EXEMPLES D'APPLICATIONS

**Critère :**  $(\varphi(\mathcal{R}'_i) (\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i))_{i \in \mathbb{N}}$  sommable.

## II.3 — EXEMPLES D'APPLICATIONS

**Critère :**  $(\varphi(\mathbb{R}'_i) (\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i))_{i \in \mathbb{N}}$  sommable.

**Théorème.** [DKLMT]

Il existe une OE  $(L^p, L^q)$ -intégrable de  $\mathbb{Z}^n$  vers  $\mathbb{Z}^m$   
pour tout  $p < m/n$  et tout  $q < n/m$ .

## II.3 — EXEMPLES D'APPLICATIONS

**Critère :**  $(\varphi(\mathcal{R}'_i) (\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i))_{i \in \mathbb{N}}$  sommable.

**Théorème.** [DKLMT]

Il existe une OE  $(L^p, L^q)$ -intégrable de  $\mathbb{Z}^2$  vers  $\mathbb{Z}$   
pour tout  $p < 1/2$  et tout  $q < 2$ .

## II.3 — EXEMPLES D'APPLICATIONS

**Critère :**  $(\varphi(R'_i) (\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i))_{i \in \mathbb{N}}$  sommable.

**Théorème.** [DKLMT]

Il existe une OE  $(L^p, L^q)$ -intégrable de  $\mathbb{Z}^2$  vers  $\mathbb{Z}$  pour tout  $p < 1/2$  et tout  $q < 2$ .

$$\text{Dans } \mathbb{Z}^2 \quad \Sigma_{i+1} := \{0, 2^i\}^2$$

$$\text{Dans } \mathbb{Z} \quad \Sigma'_{i+1} := \{0, 4^i, 2 \cdot 4^i, 3 \cdot 4^i\}$$

## II.3 — EXEMPLES D'APPLICATIONS

**Critère :**  $(\varphi(R'_i) (\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i))_{i \in \mathbb{N}}$  sommable.

**Théorème.** [DKLMT]

Il existe une OE  $(L^p, L^q)$ -intégrable de  $\mathbb{Z}^2$  vers  $\mathbb{Z}$  pour tout  $p < 1/2$  et tout  $q < 2$ .

$$\text{Dans } \mathbb{Z}^2 \quad \Sigma_{i+1} := \{0, 2^i\}^2$$

$$\text{Dans } \mathbb{Z} \quad \Sigma'_{i+1} := \{0, 4^i, 2 \cdot 4^i, 3 \cdot 4^i\}$$

On retrouve l'odomètre

$$\mathbb{Z}^2 \simeq \{0, 1, 2, 3\}^{\mathbb{N}} \simeq \mathbb{Z}$$

## II.3 — APPLICATIONS : PB INVERSE

## II.3 — APPLICATIONS : PB INVERSE

$\varphi$

## II.3 — APPLICATIONS : PB INVERSE

$\varphi$

## II.3 — APPLICATIONS : PB INVERSE

$$\begin{array}{c} \text{Donne } G \text{ tq } I_G \sim \varphi \\ \curvearrowright \\ \varphi \xrightarrow{[\text{BZ21}]} G \end{array}$$

## II.3 — APPLICATIONS : PB INVERSE

$$\begin{array}{c}
 \text{Donne } G \text{ tq } I_G \sim \varphi \\
 \curvearrowright \\
 \varphi \xrightarrow{[\text{BZ21}]} G \xrightarrow{\text{F}\emptyset\text{TS}} \Sigma_n
 \end{array}$$

## II.3 — APPLICATIONS : PB INVERSE

$$\begin{array}{c} \text{Donne } G \text{ tq } I_G \sim \varphi \\ \curvearrowright \\ \varphi \xrightarrow{[\text{BZ21}]} G \xrightarrow{\text{F}\emptyset\text{TS}} \Sigma_n \end{array}$$

$$\mathbb{Z}$$

## II.3 — APPLICATIONS : PB INVERSE

$$\begin{array}{c} \text{Donne } G \text{ tq } I_G \sim \varphi \\ \curvearrowright \\ \varphi \xrightarrow{[\text{BZ21}]} G \xrightarrow{\text{F}\emptyset\text{TS}} \Sigma_n \end{array}$$

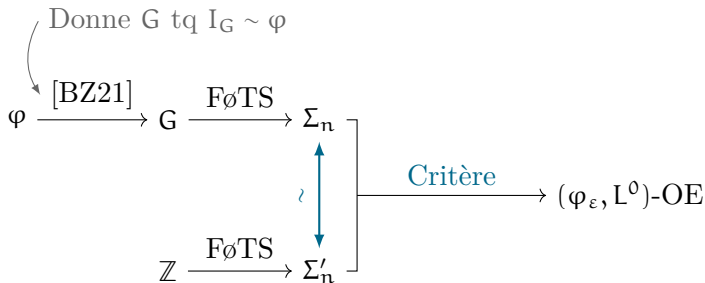
$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{F}\emptyset\text{TS}} \Sigma'_n$$

## II.3 — APPLICATIONS : PB INVERSE


Donne  $G$  tq  $I_G \sim \varphi$

$$\begin{array}{ccccc} \varphi & \xrightarrow{[\text{BZ21}]} & G & \xrightarrow{\text{F}\emptyset\text{TS}} & \Sigma_n \\ & & & & \updownarrow \wr \\ & & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{F}\emptyset\text{TS}} & \Sigma'_n \end{array}$$

## II.3 — APPLICATIONS : PB INVERSE

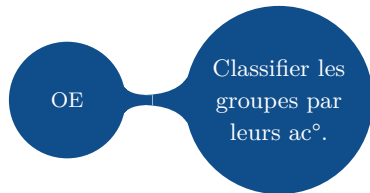


# CONCLUSION : RÉCAPITULATIF



Classifier les  
groupes par  
leurs  $ac^\circ$ .

# CONCLUSION : RÉCAPITULATIF



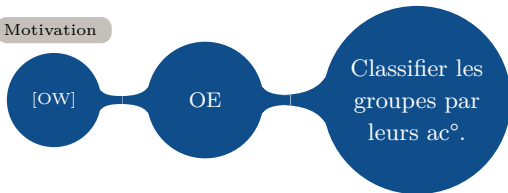
# CONCLUSION : RÉCAPITULATIF

Motivation

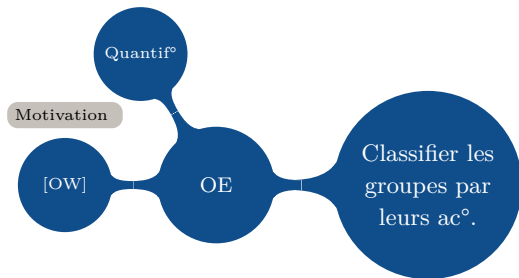
[OW]

OE

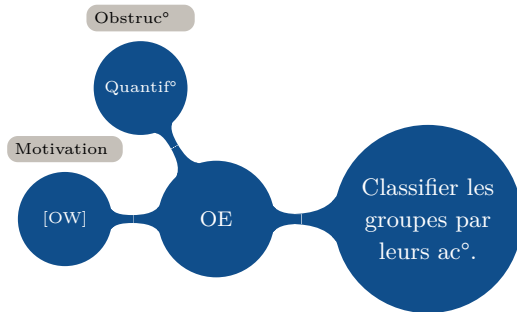
Classifier les  
groupes par  
leurs  $ac^\circ$ .



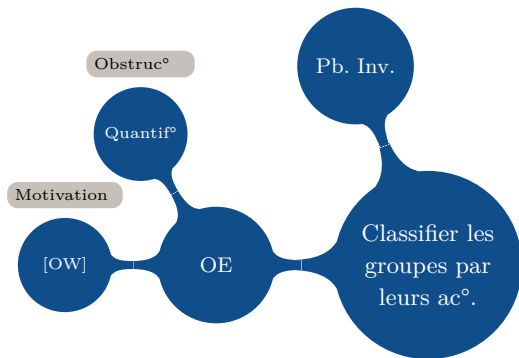
# CONCLUSION : RÉCAPITULATIF



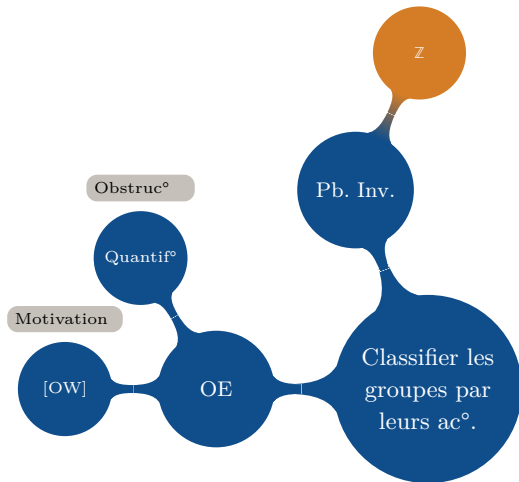
# CONCLUSION : RÉCAPITULATIF



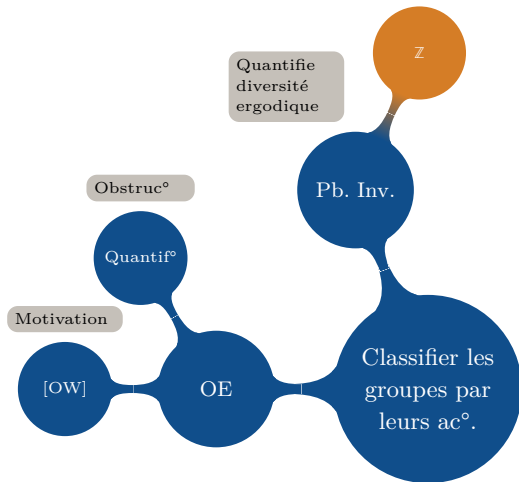
# CONCLUSION : RÉCAPITULATIF



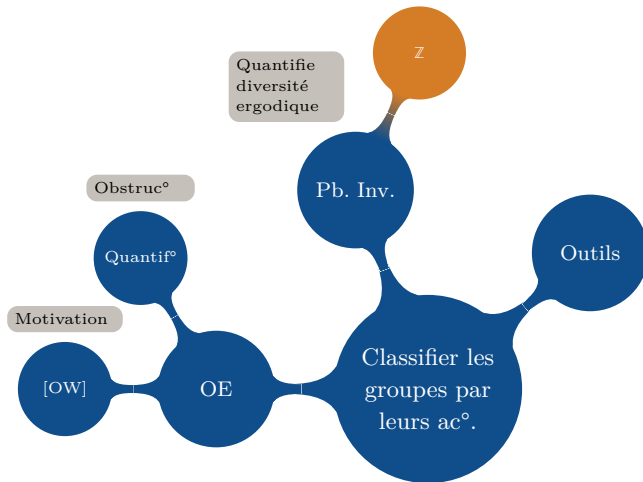
# CONCLUSION : RÉCAPITULATIF



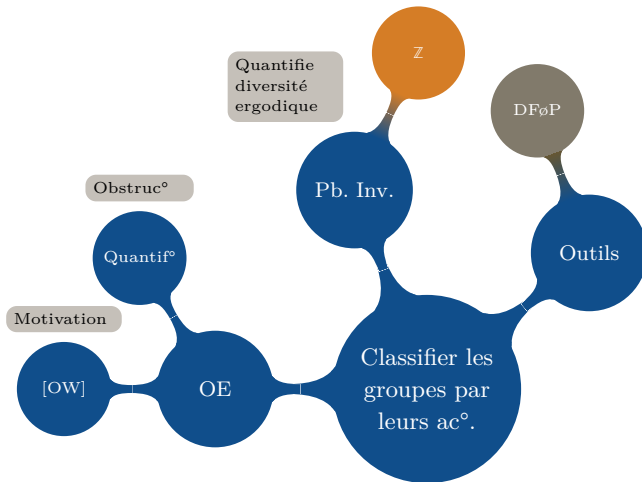
# CONCLUSION : RÉCAPITULATIF



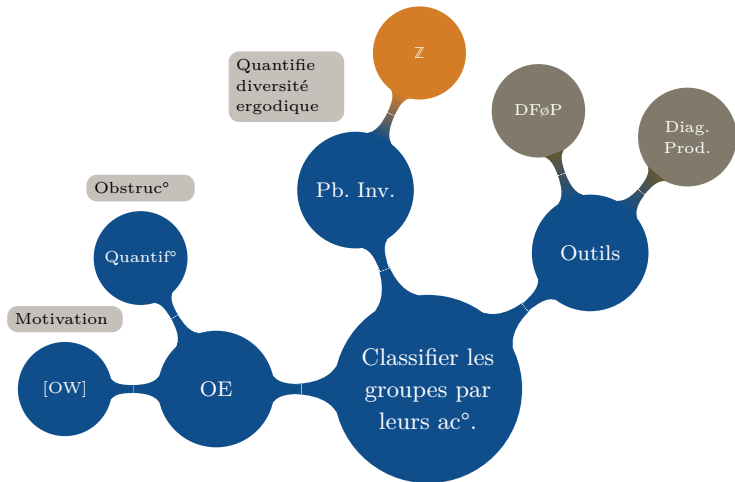
# CONCLUSION : RÉCAPITULATIF



# CONCLUSION : RÉCAPITULATIF



# CONCLUSION : RÉCAPITULATIF



# ANNEXES

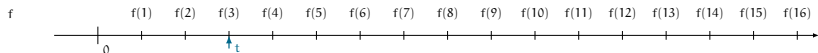
**A** Produits diagonaux

**B** Construction de  $X$  dans la proposition clef

# A — PRODUITS DIAGONAUX

Soit  $A, B$  deux groupes finis

et soit  $(A \times B) \wr (A \times B)$



# A — PRODUITS DIAGONAUX

Soit  $A, B$  deux groupes finis

et soit  $(A \times B) \wr (A \times B)$



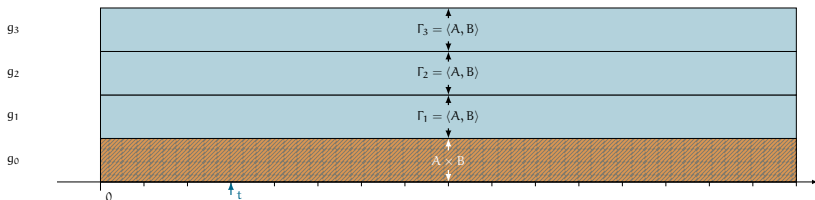
# A — PRODUITS DIAGONAUX

Soit  $A, B$  deux groupes finis et  $(\Gamma_m)_m$  tq.  $\Gamma_m = \langle A, B \rangle$  et  $\Gamma_0 := A \times B$  et soit

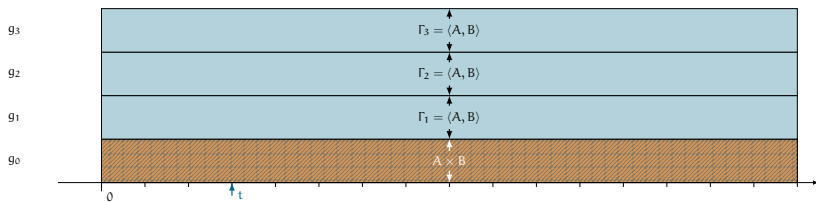
# A — PRODUITS DIAGONAUX

Soit  $A, B$  deux groupes finis et  $(\Gamma_m)_m$  tq.  $\Gamma_m = \langle A, B \rangle$  et  $\Gamma_0 := A \times B$  et soit

$$\left( (g_m)_{m \in \mathbb{N}}, \mathfrak{t} \right) \text{ st. } g_m : \mathbb{Z} \rightarrow \Gamma_m.$$



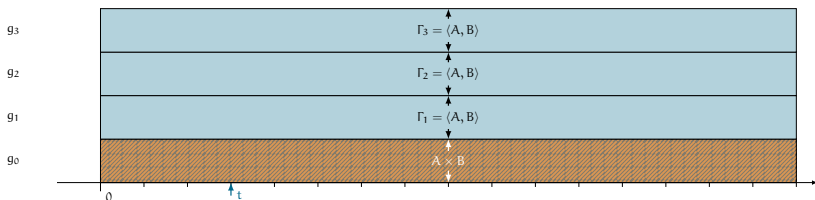
Soit  $(\kappa_m)_{m \in \mathbb{N}}$  sous-suite de  $(\kappa^n)_n$  et



Soit  $(\kappa_m)_{m \in \mathbb{N}}$  sous-suite de  $(\kappa^n)_n$  et

$$\Delta = \left\langle \left( (a\delta_0)_m, 0 \right), \left( (b\delta_{\kappa_m})_m, 0 \right), (0, 1), a \in A, b \in B \right\rangle$$

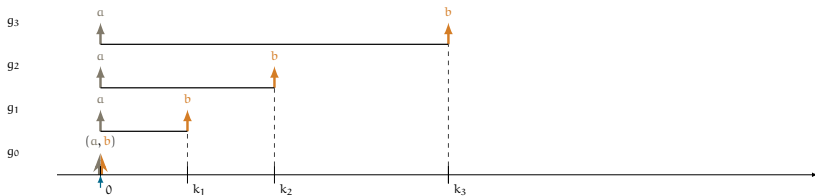
$$= \mathbb{Z} * A * B / \bigcap_m \ker (\mathbb{Z} * A * B \rightarrow \Gamma_m \wr \mathbb{Z}).$$



Soit  $(k_m)_{m \in \mathbb{N}}$  sous-suite de  $(\kappa^n)_n$  et

$$\Delta = \left\langle \left( (a\delta_0)_m, 0 \right), \left( (b\delta_{k_m})_m, 0 \right), (0, 1), a \in A, b \in B \right\rangle$$

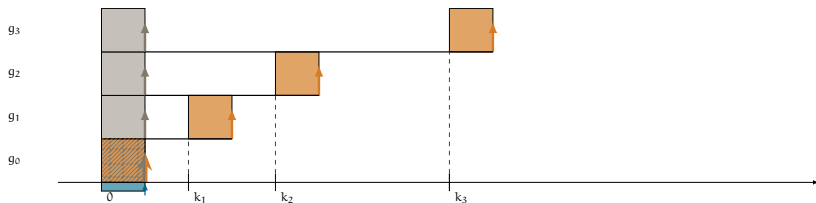
$$= \mathbb{Z} * A * B / \bigcap_m \ker (\mathbb{Z} * A * B \rightarrow \Gamma_m \wr \mathbb{Z}).$$



Soit  $(k_m)_{m \in \mathbb{N}}$  sous-suite de  $(\kappa^n)_n$  et

$$\Delta = \left\langle \left( (a\delta_0)_m, 0 \right), \left( (b\delta_{k_m})_m, 0 \right), (0, 1), a \in A, b \in B \right\rangle$$

$$= \mathbb{Z} * A * B / \bigcap_m \ker (\mathbb{Z} * A * B \rightarrow \Gamma_m \wr \mathbb{Z}).$$

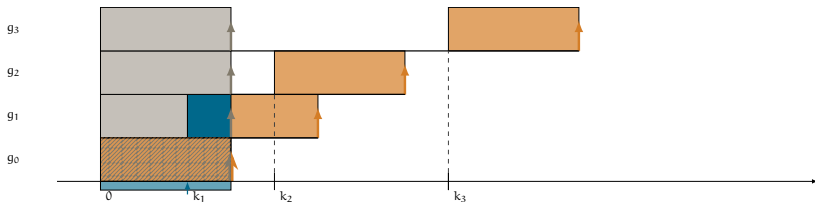




Soit  $(k_m)_{m \in \mathbb{N}}$  sous-suite de  $(\kappa^n)_n$  et

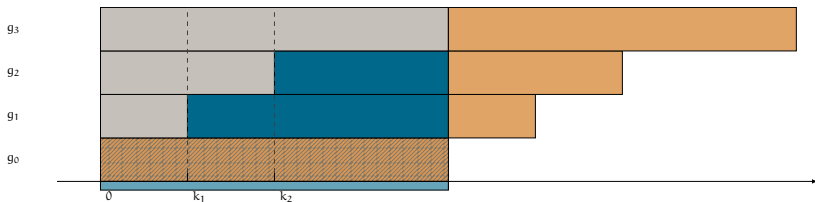
$$\Delta = \left\langle \left( (a\delta_0)_m, 0 \right), \left( (b\delta_{k_m})_m, 0 \right), (0, 1), a \in A, b \in B \right\rangle$$

$$= \mathbb{Z} * A * B / \bigcap_m \ker (\mathbb{Z} * A * B \rightarrow \Gamma_m \wr \mathbb{Z}).$$



Soit  $(k_m)_{m \in \mathbb{N}}$  sous-suite de  $(\kappa^n)_n$  et

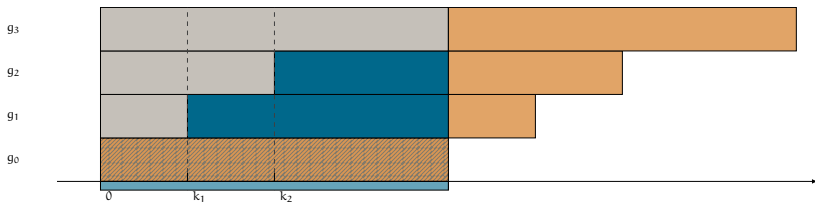
$$\begin{aligned} \Delta &= \left\langle \left( (a\delta_0)_m, 0 \right), \left( (b\delta_{k_m})_m, 0 \right), (0, 1), a \in A, b \in B \right\rangle \\ &= \mathbb{Z} * A * B / \bigcap_m \ker (\mathbb{Z} * A * B \rightarrow \Gamma_m \wr \mathbb{Z}). \end{aligned}$$



Soit  $(\kappa_m)_{m \in \mathbb{N}}$  sous-suite de  $(\kappa^n)_n$  et

$$\begin{aligned} \Delta &= \left\langle \left( (a\delta_0)_m, 0 \right), \left( (b\delta_{\kappa_m})_m, 0 \right), (0, 1), a \in A, b \in B \right\rangle \\ &= \mathbb{Z} * A * B / \bigcap_m \ker (\mathbb{Z} * A * B \rightarrow \Gamma_m \wr \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

**Suite de Følner**  $T_n := \{(f, t) \in \Delta \mid \text{range}(f, t) \in [0, \kappa^n - 1]\}$ .



## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

Soit  $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite pavante de  $G$  et  $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ .

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

Soit  $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite pavante de  $G$  et  $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ .

**Définissons l'action de  $G$  sur  $X$ .**

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

Soit  $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite pavante de  $G$  et  $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ .

**Définissons l'action de  $G$  sur  $X$ .**

$$X \ni (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

Soit  $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite pavante de  $G$  et  $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ .

Définissons l'action de  $G$  sur  $X$ .

$$X \ni (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$$



$$x_k \cdots x_0$$

$$T_k = \Sigma_k \cdots \Sigma_0$$

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

Soit  $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite pavante de  $G$  et  $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ .

**Définissons l'action de  $G$  sur  $X$ .**

Soit  $g \in G$ ,

$$\begin{array}{c} X \ni (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \downarrow \\ T_k \ni x_k \cdots x_0 \end{array}$$

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

Soit  $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite pavante de  $G$  et  $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ .

**Définissons l'action de  $G$  sur  $X$ .**

Soit  $g \in G$ ,

$$\begin{array}{c} X \ni (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \downarrow \\ T_k \ni x_k \cdots x_0 \end{array}$$

$(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Følner  $\Rightarrow$  pour  $k$  assez grand  $x_k \cdots x_0 g \in T_k$ .

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

Soit  $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite pavante de  $G$  et  $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ .

**Définissons l'action de  $G$  sur  $X$ .**

Soit  $g \in G$ , il existe  $k_g$  tel que  $(x_{k_g} \cdots x_0)g \in T_{k_g}$

$$\begin{array}{c} X \ni (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \downarrow \\ T_k \ni x_{k_g} \cdots x_0 \end{array}$$

$(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Følner  $\Rightarrow$  pour  $k$  assez grand  $x_k \cdots x_0 g \in T_k$ .

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

Soit  $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite pavante de  $G$  et  $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ .

**Définissons l'action de  $G$  sur  $X$ .**

Soit  $g \in G$ , il existe  $k_g$  tel que  $(x_{k_g} \cdots x_0)g \in T_{k_g}$

$$\begin{array}{ccc}
 X \ni (x_n)_{n \in \mathbb{N}} & & \\
 \downarrow & & \\
 T_k \ni x_{k_g} \cdots x_0 & \xrightarrow{g} & x_{k_g} \cdots x_0 g \\
 & & T_{k_g} = \Sigma_{k_g} \cdots \Sigma_0
 \end{array}$$

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

Soit  $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite pavante de  $G$  et  $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ .

**Définissons l'action de  $G$  sur  $X$ .**

Soit  $g \in G$ , il existe  $k_g$  tel que  $(x_{k_g} \cdots x_0)g \in T_{k_g}$

$$\begin{array}{ccc}
 X \ni (x_n)_{n \in \mathbb{N}} & & \\
 \downarrow & & \\
 T_k \ni x_{k_g} \cdots x_0 & \xrightarrow{g} & x_{k_g} \cdots x_0 g = x'_{k_g} \cdots x'_0 \\
 & & T_{k_g} = \Sigma_{k_g} \cdots \Sigma_0
 \end{array}$$

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

Soit  $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite pavante de  $G$  et  $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ .

**Définissons l'action de  $G$  sur  $X$ .**

Soit  $g \in G$ , il existe  $k_g$  tel que  $(x_{k_g} \cdots x_0)g \in T_{k_g}$

$$\begin{array}{ccc}
 X \ni (x_n)_{n \in \mathbb{N}} & & (x'_0, \dots, x'_{k_g}, x_{k_g+1}, \dots) \in X \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 T_k \ni x_{k_g} \cdots x_0 & \xrightarrow{g} & x_{k_g} \cdots x_0 g = x'_{k_g} \cdots x'_0 \in T_{k_g}
 \end{array}$$

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

Soit  $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite pavante de  $G$  et  $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ .

**Définissons l'action de  $G$  sur  $X$ .**

Soit  $g \in G$ , il existe  $k_g$  tel que  $(x_{k_g} \cdots x_0)g \in T_{k_g}$

$$\begin{array}{ccc}
 X \ni (x_n)_{n \in \mathbb{N}} & \xrightarrow{\quad g \quad} & g \cdot (x_n)_n := (x'_0, \dots, x'_{k_g}, x_{k_g+1}, \dots) \in X \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 T_k \ni x_{k_g} \cdots x_0 & \xrightarrow{\quad g \quad} & x_{k_g} \cdots x_0 g = x'_{k_g} \cdots x'_0 \in T_{k_g}
 \end{array}$$

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

Soit  $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite pavante de  $G$  et  $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ .

**Définissons l'action de  $G$  sur  $X$ .**

Soit  $g \in G$ , il existe  $k_g$  tel que  $(x_{k_g} \cdots x_0)g \in T_{k_g}$

$$\begin{array}{ccc}
 X \ni (x_n)_{n \in \mathbb{N}} & \xrightarrow{\quad g \quad} & g \cdot (x_n)_n := (x'_0, \dots, x'_{k_g}, x_{k_g+1}, \dots) \in X \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 T_k \ni x_{k_g} \cdots x_0 & \xrightarrow{\quad g \quad} & x_{k_g} \cdots x_0 g = x'_{k_g} \cdots x'_0 \in T_{k_g}
 \end{array}$$

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

Soit  $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite pavante de  $G$  et  $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ .

**Définissons l'action de  $G$  sur  $X$ .**

Soit  $g \in G$ , il existe  $k_g$  tel que  $(x_{k_g} \cdots x_0)g \in T_{k_g}$

$$\begin{array}{ccc}
 X \ni (x_n)_{n \in \mathbb{N}} & \xrightarrow{\quad g \quad} & g \cdot (x_n)_n := (x'_0, \dots, x'_{k_g}, x_{k_g+1}, \dots) \in X \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 T_{k_g} \ni x_{k_g} \cdots x_0 & \xrightarrow{\quad g \quad} & x_{k_g} \cdots x_0 g = x'_{k_g} \cdots x'_0 \in T_{k_g}
 \end{array}$$

Si  $|\Sigma_n| = |\Sigma'_n|$ , alors

$$X = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n \simeq \prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, \dots, |\Sigma_n|\} \simeq \prod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma'_n = X'$$

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

Soit  $(\Sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite pavante de  $G$  et  $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ .

Soit  $g \in G$ , il existe  $k_g$  tel que  $(x_{k_g} \cdots x_0)g \in T_{k_g}$

$$\begin{array}{ccc}
 X \ni (x_n)_{n \in \mathbb{N}} & \xrightarrow{\quad g \quad} & g \cdot (x_n)_n := (x'_0, \dots, x'_{k_g}, x_{k_g+1}, \dots) \in X \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 T_k \ni x_{k_g} \cdots x_0 & \xrightarrow{\quad g \quad} & x_{k_g} \cdots x_0 g = x'_{k_g} \cdots x'_0 \in T_{k_g}
 \end{array}$$

Si  $|\Sigma_n| = |\Sigma'_n|$ , alors

$$X = \prod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n \simeq \prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, \dots, |\Sigma_n|\} \simeq \prod_{n \in \mathbb{N}} \Sigma'_n = X'$$

$G$  et  $H$  OE sur  $X \simeq \prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, \dots, |\Sigma_n|\}$

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

**Rappel** G et H OE sur  $X \simeq \prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, \dots, |\Sigma_n|\} \simeq X'$

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

**Rappel** G et H OE sur  $X \simeq \prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, \dots, |\Sigma_n|\} \simeq X'$

Soit  $\iota : X \xrightarrow{\sim} X'$ .

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

**Rappel** G et H OE sur  $X \simeq \prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, \dots, |\Sigma_n|\} \simeq X'$

Soit  $\iota : X \xrightarrow{\sim} X'$ . Soit  $x = (x_i)_i \in X$  et  $s \in S_G$ .

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

**Rappel**  $G$  et  $H$  OE sur  $X \simeq \prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, \dots, |\Sigma_n|\} \simeq X'$

Soit  $\iota : X \xrightarrow{\sim} X'$ . Soit  $x = (x_i)_i \in X$  et  $s \in S_G$ .

- Soit  $k_0 := k_0(x)$  minimal tq  $x_{k_0} \cdots x_0 \in T_{k_0} \setminus \partial T_{k_0}$ .

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

**Rappel** G et H OE sur  $X \simeq \prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, \dots, |\Sigma_n|\} \simeq X'$

Soit  $\iota : X \xrightarrow{\sim} X'$ . Soit  $x = (x_i)_i \in X$  et  $s \in S_G$ .

- Soit  $k_0 := k_0(x)$  minimal tq  $x_{k_0} \cdots x_0 \in T_{k_0} \setminus \partial T_{k_0}$ .  
Alors  $s \cdot (x_i)_i = (x'_0, \dots, x'_{k_0}, x_{k_0+1}, \dots)$ ,

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

**Rappel** G et H OE sur  $X \simeq \prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, \dots, |\Sigma_n|\} \simeq X'$

Soit  $\iota : X \xrightarrow{\sim} X'$ . Soit  $x = (x_i)_i \in X$  et  $s \in S_G$ .

- Soit  $k_0 := k_0(x)$  minimal tq  $x_{k_0} \cdots x_0 \in T_{k_0} \setminus \partial T_{k_0}$ .  
Alors  $s \cdot (x_i)_i = (x'_0, \dots, x'_{k_0}, x_{k_0+1}, \dots)$ , donc

$$d_{S_H} \left( (x_i)_i, s \cdot (x_i)_i \right) = \left| (\iota(x_0) \dots \iota(x_{k_0}))^{-1} \iota(x'_0) \dots \iota(x'_{k_0}) \right|_{S_H}$$

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

**Rappel** G et H OE sur  $X \simeq \prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, \dots, |\Sigma_n|\} \simeq X'$

Soit  $\iota : X \xrightarrow{\sim} X'$ . Soit  $x = (x_i)_i \in X$  et  $s \in S_G$ .

- Soit  $k_0 := k_0(x)$  minimal tq  $x_{k_0} \cdots x_0 \in T_{k_0} \setminus \partial T_{k_0}$ .  
Alors  $s \cdot (x_i)_i = (x'_0, \dots, x'_{k_0}, x_{k_0+1}, \dots)$ , donc

$$\begin{aligned} d_{S_H} \left( (x_i)_i, s \cdot (x_i)_i \right) &= \left| (\iota(x_0) \dots \iota(x_{k_0}))^{-1} \iota(x'_0) \dots \iota(x'_{k_0}) \right|_{S_H} \\ &\leq \text{diam} (T'_{k_0}) = R'_{k_0} \end{aligned}$$

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

**Rappel** G et H OE sur  $X \simeq \prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, \dots, |\Sigma_n|\} \simeq X'$

Soit  $\iota : X \xrightarrow{\sim} X'$ . Soit  $x = (x_i)_i \in X$  et  $s \in S_G$ .

- Soit  $k_0 := k_0(x)$  minimal tq  $x_{k_0} \cdots x_0 \in T_{k_0} \setminus \partial T_{k_0}$ .  
Alors  $s \cdot (x_i)_i = (x'_0, \dots, x'_{k_0}, x_{k_0+1}, \dots)$ , donc

$$\begin{aligned} d_{S_H} \left( (x_i)_i, s \cdot (x_i)_i \right) &= \left| (\iota(x_0) \dots \iota(x_{k_0}))^{-1} \iota(x'_0) \dots \iota(x'_{k_0}) \right|_{S_H} \\ &\leq \text{diam}(T'_{k_0}) = R'_{k_0} \end{aligned}$$

- Proportion de tels éléments :

$$\{x \in X : x_k \cdots x_0 \in T_k \setminus \partial T_k, x_{k-1} \cdots x_0 \in \partial T_{k-1}\}$$

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

**Rappel** G et H OE sur  $X \simeq \prod_{i \in \mathbb{N}} \{0, \dots, |\Sigma_n|\} \simeq X'$

Soit  $\iota : X \xrightarrow{\sim} X'$ . Soit  $x = (x_i)_i \in X$  et  $s \in S_G$ .

- Soit  $k_0 := k_0(x)$  minimal tq  $x_{k_0} \cdots x_0 \in T_{k_0} \setminus \partial T_{k_0}$ .  
Alors  $s \cdot (x_i)_i = (x'_0, \dots, x'_{k_0}, x_{k_0+1}, \dots)$ , donc

$$\begin{aligned} d_{S_H} \left( (x_i)_i, s \cdot (x_i)_i \right) &= \left| (\iota(x_0) \dots \iota(x_{k_0}))^{-1} \iota(x'_0) \dots \iota(x'_{k_0}) \right|_{S_H} \\ &\leq \text{diam}(T'_{k_0}) = R'_{k_0} \end{aligned}$$

- Proportion de tels éléments :

$$|\{x \in X : x_k \cdots x_0 \in T_k \setminus \partial T_k, x_{k-1} \cdots x_0 \in \partial T_{k-1}\}| \leq (\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k) |T_k|.$$

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

**Rappel**  $R'_{k_0(x)-1} < d_{S_H} \left( (x_i)_i, s \cdot (x_i)_i \right) \leq R'_{k_0(x)}$   
avec proba  $(\varepsilon_{k_0(x)-1} - \varepsilon_{k_0(x)})$ .

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

**Rappel**  $R'_{k_0(x)-1} < d_{S_H} \left( (x_i)_i, s \cdot (x_i)_i \right) \leq R'_{k_0(x)}$   
avec proba  $(\varepsilon_{k_0(x)-1} - \varepsilon_{k_0(x)})$ .

$$\int_{\mathcal{X}} \varphi (d_{S_H} (x, s \cdot x)) \, d\mu(x)$$

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

**Rappel**  $R'_{k_0(x)-1} < d_{S_H}((x_i)_i, s \cdot (x_i)_i) \leq R'_{k_0(x)}$   
avec proba  $(\varepsilon_{k_0(x)-1} - \varepsilon_{k_0(x)})$ .

$$\int_X \varphi(d_{S_H}(x, s \cdot x)) d\mu(x) \\ \leq \varphi(R'_0) + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \int_{\{x \in X : k_0(x) = k\}} \varphi(d_{S_H}(x, s \cdot x)) d\mu(x),$$

Rappel  $k_0(x) := \min\{i : x_i \cdots x_0 \notin \partial T_i\}$

## II.2 — CRITÈRE : DÉMO

**Rappel**  $R'_{k_0(x)-1} < d_{S_H}((x_i)_i, s \cdot (x_i)_i) \leq R'_{k_0(x)}$   
avec proba  $(\varepsilon_{k_0(x)-1} - \varepsilon_{k_0(x)})$ .

$$\begin{aligned} & \int_X \varphi(d_{S_H}(x, s \cdot x)) \, d\mu(x) \\ & \leq \varphi(R'_0) + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \int_{\{x \in X : k_0(x) = k\}} \varphi(d_{S_H}(x, s \cdot x)) \, d\mu(x), \\ & \leq \varphi(R'_0) + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \varphi(R'_k) (\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k). \end{aligned}$$

Rappel  $k_0(x) := \min\{i : x_i \cdots x_0 \notin \partial T_i\}$